MathConceptition

2025

S4-6

Question Booklet

問題簿

问题本

限時：60 分鐘　　　　不允許使用計算機。

比賽須知：

1. 未宣布開始前，切勿翻閱此問題簿。
2. 請核對答題紙上列出的資料是否與你相符。如有問題，請舉手。
3. 所有答案必須寫在答題紙內，並須用鉛筆作答。請勿填寫或畫花題號後方的圓圈，否則該題答案將會作廢。
4. 除非題目特別表明，所有答案均不需填寫單位，但必須以準確數值及最簡方式表示。
5. 比賽完結時監考員會收回桌上的草稿紙，但草稿紙上所書寫的任何文字或圖表將不獲評閱。
6. 此問題簿的附圖不一定依比例繪成。

Time: 60 minutes　　　　Calculators are NOT permitted.

Instructions:

1. **DO NOT OPEN THIS QUESTION BOOKLET UNTIL YOU ARE TOLD TO DO SO.**
2. **If the information printed on your answer sheet is not correct, please inform the invigilator immediately.**
3. **Please use a pencil and write your answers neatly ONLY on the answer sheet provided. DO NOT write or draw in the circle next to each answer box. No mark will be given if you failed to follow this instruction.**
4. **Unless otherwise specified, all answers must be in exact value and in its simplest form. Writing the units for the answers is NOT necessary.**
5. **Rough-work sheets provided will be collected at the end of the contest but they will not be marked.**
6. **Diagrams in this question booklet are not necessarily drawn to scale.**

限时：60 分钟　　　　不允许使用计算器。

比赛须知：

1. 未宣布开始前，请勿翻阅此问题本。
2. 请核对答题纸上列出的信息是否与你一致。如有疑问，请举手。
3. 所有答案必须写在答题纸上，并需用铅笔作答。请勿填写或涂污题号后面的圆圈，否则该题答案将作废。
4. 除非题目特别说明，所有答案均不需填写单位，但必须以准确数值和最简方式表示。
5. 比赛结束时监考老师会回收桌上的草稿纸，但草稿纸上所写的任何文字或图表将不予评分。
6. 此问题本的附图不一定按比例绘制。

1) 設 $g(y)$ 為一個次數為 2025 的多項式，其中 $g(\frac{3}{4}) = 0$ 及 $g(-2) = 0$。下列哪些多項式必定能整除 $g(x)$？ [3%]

Let $g(y)$ be a polynomial of degree 2025, where $g(\frac{3}{4}) = 0$ and $g(-2) = 0$. By which of the following polynomials must $g(x)$ be divisible?

设 $g(y)$ 为一个次数为 2025 的多项式，其中 $g(\frac{3}{4}) = 0$ 及 $g(-2) = 0$。下列哪些多项式必定能整除 $g(x)$?

A. $x + 2$ **B.** $x - 2$ **C.** $-2 - x$ **D.** $2 - x$

E. $3x + 4$ **F.** $4 - 3x$ **G.** $3x - 4$ **H.** $x - \frac{3}{4}$

I. $x - \frac{4}{3}$ **J.** $4x + 3$ **K.** $-3x - 4$ **L.** $4x - 3$

---

2) 設 $f(x) = 3x^2 + 7x$。解方程 $f(y + 1) = 6$。 [3.1%]

Let $f(x) = 3x^2 + 7x$. Solve the equation $f(y + 1) = 6$.

设 $f(x) = 3x^2 + 7x$。解方程 $f(y + 1) = 6$。

---

3) 求 $y + 169 = x(90 - x) - 1500$ 的圖像的頂點坐標。 [3.2%]

Find the coordinates of the vertex of the graph of $y + 169 = x(90 - x) - 1500$.

求 $y + 169 = x(90 - x) - 1500$ 的图像的顶点坐标。

---

4) 化簡下列代數式。 [3.3%]

Simplify the following algebraic expression.

化简下列代数式。

$$-\frac{x}{x+6} \div \left(2 - \frac{x}{x+6}\right)$$

5) 已知 $x<0$，化簡下列代數式。 [3.4%]

It is known that $x<0$, simplify the following algebraic expression.

已知 $x<0$，化简下列代数式。

$$-\sqrt{\left(\sqrt[2024]{x^{2024}}-x\right)^2}$$

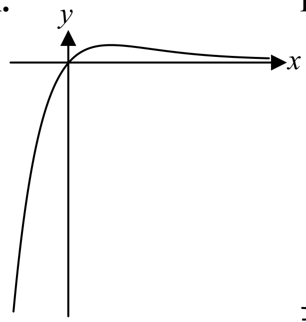
---

6) 設 $a>1$。下列哪個/些有可能是在表示 $y=xa^x$ 的圖像？ [3.5%]

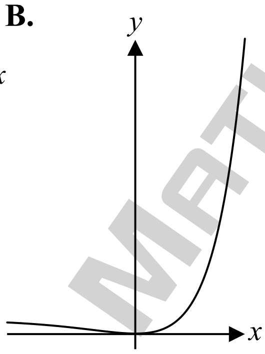
Let $a>1$. Which of the following figures could be representing the graph of $y=xa^x$?

设 $a>1$。下列哪个/些有可能是在表示 $y=xa^x$ 的图像？

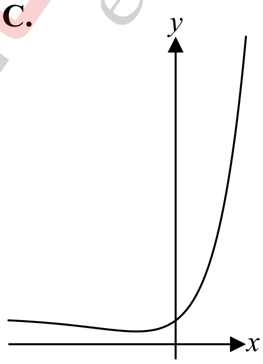
A.



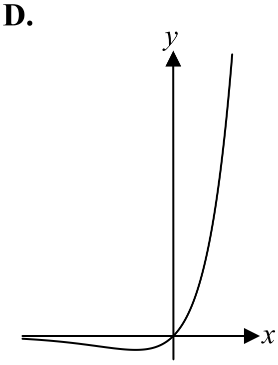
B.



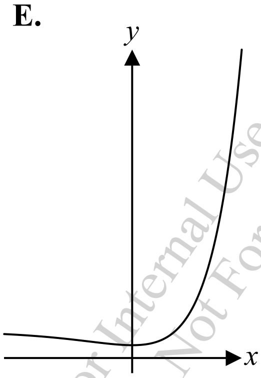
C.



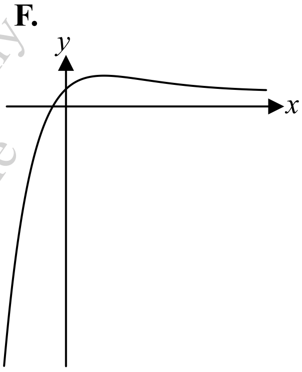
D.



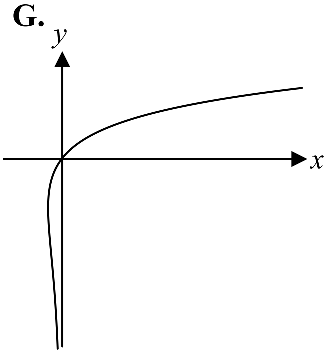
E.



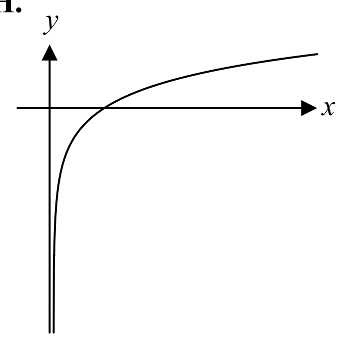
F.



G.



H.



7) 已知 $P(x) = Ax^2 + Bx + C$，其中 A、B 和 C 均為實數，且 $P(0) = 3$、$P(2) = 7$ 和 $P(5) = 18$。求 $A - B + C$ 的值。 [3.6%]

Given that $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, where A, B and C are real numbers, and $P(0) = 3$, $P(2) = 7$ and $P(5) = 18$. Find the value of $A - B + C$.

已知 $P(x) = Ax^2 + Bx + C$，其中 A、B 和 C 均为实数，且 $P(0) = 3$、$P(2) = 7$ 和 $P(5) = 18$。求 $A - B + C$ 的值。

---

8) 已知 $x^2 - kx - 2k = 0$ 有兩個相等的根。若 k 為負整數，求 x。 [3.7%]

Given that $x^2 - kx - 2k = 0$ has two equal roots. Find x if k is a negative integer.

已知 $x^2 - kx - 2k = 0$ 有两个相等的根。若 k 为负整数，求 x。

---

9) 以 $a + bi$ 的形式表示下列算式，其中 a 和 b 均為實數，而 i 為虛數，其定義為 $i^2 = -1$。 [4.8%]

Express the following in the form of $a + bi$, where a and b are real numbers and i is the imaginary number defined by $i^2 = -1$.

以 $a + bi$ 的形式表示下列算式，其中 a 和 b 均为实数，而 i 为虚数，其定义为 $i^2 = -1$。

$$\frac{-i^4 \times (-i)^{-12} \times (-i)^{-15}}{\left(-i^{-7}\right) \times (-i)^{19} - (-i)^{2025}}$$

10) 設 x_1、x_2 及 x_3 均為非負整數，且 $x_1 + x_2 + x_3 = 50$。$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 的最大可能值是多少？ [4.9%]

Let x_1, x_2 and x_3 be non-negative integers such that $x_1 + x_2 + x_3 = 50$. What is the greatest possible value of $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$?

设 x_1、x_2 及 x_3 均为非负整数，且 $x_1 + x_2 + x_3 = 50$。$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 的最大可能值是多少？

---

11) 已知 $3^a = 5$ 和 $9^b = 11$。以 $Pa + Qb + R$ 的形式表示 $\log_3 \frac{11}{75}$，其中 P、Q 和 R 均為非零實數。 [5.1%]

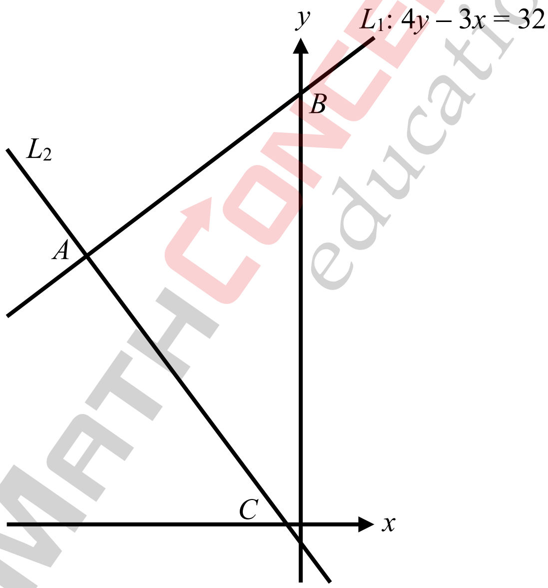
It is known that $3^a = 5$ and $9^b = 11$. Express $\log_3 \frac{11}{75}$ in the form of $Pa + Qb + R$ where P, Q and R are non-zero real numbers.

已知 $3^a = 5$ 和 $9^b = 11$。以 $Pa + Qb + R$ 的形式表示 $\log_3 \frac{11}{75}$，其中 P、Q 和 R 均为非零实数。

12) 圖中所示為兩條線性方程的圖像 L_1 和 L_2。L_1 與 L_2 相交於 $A(-4, 5)$。 [5.2%]
已知 L_1 與 L_2 互相垂直。B 是 L_1 的 y 截距，C 是 L_2 的 x 截距。
若 $AC = 6.25$ 單位，則 $\triangle ABC$ 的面積是 __?__ 平方單位。

The figure shows the graphs of two linear equations, L_1 and L_2.
L_1 and L_2 intersect at $A(-4, 5)$. It is known that L_1 and L_2 are perpendicular to each other. B is the y-intercept of L_1 and C is the x-intercept of L_2.
If $AC = 6.25$ units, then the area of $\triangle ABC$ is __?__ square units.

图中所示为两条线性方程的图像 L_1 和 L_2。L_1 与 L_2 相交于 $A(-4, 5)$。
已知 L_1 与 L_2 互相垂直。B 是 L_1 的 y 截距，C 是 L_2 的 x 截距。
若 $AC = 6.25$ 单位，则 $\triangle ABC$ 的面积是 __?__ 平方单位。



13) 若 $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$，求 $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ 的值。 [6.3%]

If $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, find the value of $\cos^2\theta - \sin^2\theta$.

若 $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$，求 $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ 的值。

14) 已知 $T(y)=\dfrac{\sqrt[4]{81y^4+0.02}}{3}$ 。對於所有正整數 n，$T^1(y)=T(y)$ 及 $T^{n+1}(y)=T\left(T^n(y)\right)$ 。求最接近 $3T^{2025}(10)$ 的值的整數。 [6.4%]

Given that $T(y)=\dfrac{\sqrt[4]{81y^4+0.02}}{3}$. For all positive integer n, $T^1(y)=T(y)$ and $T^{n+1}(y)=T\left(T^n(y)\right)$. Find the nearest integer to the value of $3T^{2025}(10)$.

已知 $T(y)=\dfrac{\sqrt[4]{81y^4+0.02}}{3}$。对于所有正整数 n，$T^1(y)=T(y)$ 及 $T^{n+1}(y)=T\left(T^n(y)\right)$。求最接近 $3T^{2025}(10)$ 的值的整数。

---

15) 求 $g(x)$ 的最小可能值。 [6.5%]

Find the least possible value of $g(x)$.

求 $g(x)$ 的最小可能值。

$$g(x)=\frac{4x^2-4x+5}{2x-1},\ x>0.5$$

16) 設 $S = \sin(0.2025°)$、$C = \cos(-0.2025°)$ 及 $T = \tan(0.2025°)$。 [6.6%]
由小至大排列 $\log_S C$、$\log_C S$、$\log_T S$ 及 $\log_T C$。

Let $S = \sin(0.2025°)$, $C = \cos(-0.2025°)$ and $T = \tan(0.2025°)$.
Arrange $\log_S C$, $\log_C S$, $\log_T S$ and $\log_T C$ in ascending order.

设 $S = \sin(0.2025°)$、$C = \cos(-0.2025°)$ 及 $T = \tan(0.2025°)$。
由小至大排列 $\log_S C$、$\log_C S$、$\log_T S$ 及 $\log_T C$。

---

17) 求下列方程的所有公共實根。 [6.7%]

Find all the common real roots of the following equations.

求下列方程的所有公共实根。

$$x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 14x - 14 = 0$$

$$x^6 + 5x^5 + 8x^4 - 35x^2 - 56x - 49 = 0$$

18) 現同時投擲四枚勻稱的六面骰子，每面的數字分別為 1 至 6，擲得的結果互相獨立，擲得的點數為 n_1、n_2、n_3 及 n_4。已知得出的點數的立方和 $n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3$ 能被 4 整除的概率可以 $\frac{p}{q}$ 的形式表示，其中 p 和 q 為兩個互質的正整數。求 $p + q$ 的值。 [6.8%]

Four fair six-sided dice with faces showing the integers 1 through 6 respectively, are rolled together independently, obtaining four integers n_1, n_2, n_3, and n_4. Given that the probability that the sum of the cubes of the integers obtained $n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3$ is divisible by 4 may be written in the form of $\frac{p}{q}$, where p and q are relatively prime positive integers. Find the value of $p + q$.

现同时投掷四枚匀称的六面骰子，每面的数字分别为 1 至 6，掷得的结果互相独立，掷得的点数为 n_1、n_2、n_3 及 n_4。已知得出的点数的立方和 $n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3$ 能被 4 整除的概率可以 $\frac{p}{q}$ 的形式表示，其中 p 和 q 为两个互质的正整数。求 $p + q$ 的值。

19) 求使 $2^{2^n+1}+2^{2^n}-1$ 能被 11 整除的首 10 個正整數 n 之和。 [6.9%]

Find the sum of the first ten positive integers n such that $2^{2^n+1}+2^{2^n}-1$ is divisible by 11.

求使 $2^{2^n+1}+2^{2^n}-1$ 能被 11 整除的首 10 个正整数 n 之和。

20) 假設 $ABCD$ 是一個圓內接四邊形，其中 $AD = 2$ 和 $BC = 3$。設 P 為 $ABCD$ 的對角線相交點，使 $\frac{BP}{DP} = \frac{3}{8}$。已知 $ABCD$ 有一個內接圓 K，而 K 的面積可以 $\frac{p\pi}{q}$ 的形式表示，其中 p 和 q 為互質的正整數，求 $p + q$ 的值。 [7%]

Suppose $ABCD$ is a cyclic quadrilateral with $AD = 2$ and $BC = 3$. Let P be the point of intersection of the diagonals of $ABCD$. Given that $\frac{BP}{DP} = \frac{3}{8}$ and $ABCD$ has an inscribed circle K, where the area of K may be written as $\frac{p\pi}{q}$ for relatively prime positive integers p and q, find the value of $p + q$.

假设 $ABCD$ 是一个圆内接四边形，其中 $AD = 2$ 和 $BC = 3$。设 P 为 $ABCD$ 的对角线相交点，使 $\frac{BP}{DP} = \frac{3}{8}$。已知 $ABCD$ 有一个内接圆 K，而 K 的面积可以 $\frac{p\pi}{q}$ 的形式表示，其中 p 和 q 为互质的正整数，求 $p + q$ 的值。

全卷完
End of paper
全卷完

空白頁
Blank page
空白页

MATH 數學·思維大激鬥 CONCEPTITION

ANSWER SHEET

REG NO			S4-6
NAME			
GRADE			
SEAT			

○ IDCHECK ○ ABSENT

	ANSWER		ANSWER
1	A, C, H, L	11	$-2a+2b-1$
2	$-4,.-\frac{1}{3}$	12	$15\frac{5}{8}, \frac{125}{8}, 15.625$
3	(45, 356)	13	$\frac{5}{7}$
4	$-\frac{x}{x+12}$	14	30
5	$2x$	15	4
6	D	16	$\log_S C < \log_T C < \log_T S < \log_C S$
7	2	17	$\sqrt[3]{7}$
8	-4	18	817
9	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	19	190
10	833	20	49

ⒶⒷⒸⒹⒺⒻ